TD n°4: Principe du maximum et lemme de Schwarz

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

N'hésitez pas à m'écrire si vous trouvez une erreur dans la correction ou si vous voulez une clarification !

Formule de Cauchy

Exercice 1. Quelques applications de la formule de Cauchy.
Pour f fonction holomorphe définie sur un disque centré en zéro, on pose $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$

1. On utilise la formule de Cauchy :
$$f'(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathbb{D}(0,r)} \frac{f(z)}{z^2} dz$$
donc
$$\begin{aligned} |f'(0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|}{r} d\theta \\ &\leq \frac{M(r)}{r} \end{aligned}$$
ce qui conclut.

2. On écrit
$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathbb{D}(0,1-1/n)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$
La majoration habituelle donne donc
$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{M(1-\frac{1}{n})}{(1-\frac{1}{n})^n}.$$
En écrivant $f(z) = \sum a_n z^n$, donc $n! a_n = f^{(n)}(0)$. On a donc
$$\limsup_n |a_n|^{1/n} \leq \limsup_n \frac{M(1-\frac{1}{n})^{1/n}}{1-\frac{1}{n}} = C.$$
Comme $\limsup_n |a_n|^{1/n}$ est l'inverse du rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$, on conclut que f s'étend au moins au disque de rayon $1/C$.

3. Si $|z| = \rho$ on a $z \in \mathbb{D}(0,r)$, donc
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathbb{D}(0,r)} \frac{f(w)}{(z-w)} dw.$$
On en déduit que
$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int \frac{M(r)}{|re^{i\theta} - z|} r d\theta.$$
Il reste à observer que $\frac{1}{|re^{i\theta}-z|} \geq \frac{1}{r-|z|} = \frac{1}{r-\rho}$ par inégalité triangulaire inversée, ce qui conclut.
Comme intelligemment remarqué en TD, on a la bien meilleure majoration $M(\rho) \leq M(r)$ par le principe du maximum.

Exercice 2. Majoration de coefficients de Taylor

1. On applique encore la formule de Cauchy pour obtenir
$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}.$$
Comme $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$, on a $M(r) \leq \frac{1}{1-r}$, ce qui permet de conclure.

2. On applique la majoration précédente à $r_n = 1 - \frac{1}{n}$, et on obtient
$$|a_n| \leq (n+1)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-n}.$$
On remarque astucieusement que
$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} < e$$
ce qui conclut pour la majoration.
Pour l'optimalité de e, on pose
$$c_n = (n+1)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-n}$$
et $f_n(z) = c_n z^n$. On vérifie alors par une simple étude de la fonction $t \mapsto t^n(1-t)$ que $|f_n(z)(1-|z|)|$ atteint un maximum de 1 en $|z| = \frac{n}{n+1}$, et la constante e est donc optimale.

Exercice 3. Le théorème de Paley-Wiener
Soit φ une fonction C^∞ à support compact inclus dans $[-A, A]$ avec $A > 0$.

1. On commence par remarquer que
$$\begin{aligned} z\hat{\varphi}(z) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) z e^{-izx} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) i \partial_x e^{-izx} dx \\ &= i\varphi(x)e^{-izx}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - i\int_{\mathbb{R}} \partial_x \varphi(x) e^{-izx} dx \\ &= -i\int_{\mathbb{R}} \partial_x \varphi(x) e^{-izx} dx. \end{aligned}$$
Le terme $\varphi(x)e^{-izx}\big|_{-\infty}^{+\infty}$ est nul car φ est à support compact. Par récurrence, on trouve
$$z^k = i^k \int_{\mathbb{R}} \partial_x^k \varphi(x) e^{-izx} dx.$$
On vérifie alors que
$$\begin{aligned} |z^k \hat{\varphi}(z)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_x^k \varphi(x)| e^{\Im(z)x} dx \\ &\leq \int_{-A}^{A} |\partial_x^k \varphi(x)| e^{\Im(z)x} dx \\ &\leq 2A \sup_{x\in[-A,A]} |\partial_x^k \varphi(x)| e^{A|\Im(z)|} \end{aligned}$$
En développant $(1+|z|)^N$, on obtient la constante universelle (en z) voulue.

2. (a) L'idée est la suivante : la dérivée k-ème de $\int_{\mathbb{R}} f(z)e^{-ixz}dz$ devrait être donnée par $(-i)^k \int_{\mathbb{R}} z^k f(z) e^{-izx} dx$. L'estimation vérifiée par f assure que cette intégrale converge absolument, et que l'on peut dériver sous le signe intégral sans souci.

(b) On intègre sur le rectangle de sommets $-R, R, R - iT, -R - iT$. On a

$$\begin{aligned} \left| \int_R^{R-iT} f(z)e^{-izx}dz \right| &\le \int_0^T |f(R-it)e^{-i(R-it)x}|dt \\ &\le \int_0^T |f(R-it)|e^{-tx}dt \\ &\le \int_0^T \frac{C_2}{(1+R^2+t^2)} e^{-tx}dt. \end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand $R \to \infty$, et il en va de même pour l'intégrale sur le segment $[-R - iT, -R]$. On obtient finalement

$$\int_{[} -R, R] f(z)e^{-izx}dz = \int_{[-R-iT,-R+iT]} f(z)e^{-izx}dz + o_{R\to\infty}(1).$$

En prenant $R \to \infty$, on obtient le résultat voulu.

(c) On majore :

$$\begin{aligned} |\hat{f}(x)| &\le e^{-xT} \int_{\mathbb{R}} |f(z - iT)|dz \\ &\le e^{-xT} \int_{\mathbb{R}} \frac{C_2}{(1+T^2+z^2)} e^{AT}dz \\ &\le e^{(A-x)T} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+z^2}dz. \end{aligned}$$

En prenant $T \to \infty$, on obtient $\hat{f}(x) = 0$ si $x - A > 0$, donc si $x > A$. Pour avoir la même conclusion quand $x < -A$, il suffit d'appliquer le résultat précédent à $z \mapsto f(-z)$.

Principe du maximum et théorème de Liouville

Exercice 4. Autour du principe du maximum.

1. On procède par l'absurde : si f n'admet aucun zéro dans le disque, alors $z \mapsto 1/f(z)$ est une fonction holomorphe au voisinage de $\mathbb{D}(0, 1)$. Mais alors $|1/f(z)| < 1 = |1/f(0)|$ sur $\partial\mathbb{D}(0, 1)$: c'est une contradiction avec le principe du maximum.

2. (a) On considère $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\le 0} \to \mathbb{C}$ la détermination principale. On vérifie que $z \mapsto \exp(\alpha_j \log f_j(z))$ est une fonction holomorphe sur U, et il en va donc de même de leur produit. Par les propriétés habituelles de l'exponentielle et du log, on a

$$\left| \prod_j f_j(z)^{\alpha_j} \right| = \prod_j |f_j(z)|^{\alpha_j}.$$

On a réalisé $\prod_j |f_j(z)|^{\alpha_j}$ comme le module d'une fonction holomorphe, et le principe du maximum est donc vérifié.

(b) Cette fois, on ne peut plus utiliser de logarithme global. On note $\varphi(z) = \sum_j \alpha_j \log |f_j(z)|$. On va commencer par prouver que si φ admet un maximum local en $a \in U$, alors elle est constante sur un voisinage de a.

En effet, par continuité de f_j, pour tout $a \in U$, $\rho > 0$ il existe $r_j > 0$ tel que $f_j(\mathbb{D}(a, r_j)) \subseteq \mathbb{D}(f_j(a), \rho)$. Supposons que a est un maximum local de φ, posons $\rho = \min_j |f_j(a)|$, et r le minimum des r_j donnés par la continuité. On a assuré que $0 \notin \mathbb{D}(f_j(a), \rho)$ et par conséquent on peut définir un logarithme de f_j sur $D(a, r)$ en composant f_j par une détermination du logarithme sur $\mathbb{D}(f_j(a), \rho)$ (qui existe, voir correction TD2). On a alors

$$\varphi(z) = \Re \left(\sum_j \alpha_j \log(f_j) \right).$$

On a donc réalisé φ comme la partie réelle d'une fonction holomorphe sur un petit ouvert autour de a, et elle est donc constante au voisinage de a si c'est un maximum local.
On va maintenant utiliser un argument de connexité pour prouver que φ est constante : on pose

$$X = \{z \in U : \varphi \text{ atteint un maximum local en } z\}.$$

On voit que X est ouvert dans U par la preuve qu'on vient de faire : si φ atteint un maximum en $a \in U$, elle atteint ce même maximum local sur un voisinage ouvert de a, et X est donc voisinage de tous ses points. Reste à voir que X est fermé. Pour ce faire, il suffit de trouver une famille d'ouverts $(U_i)_i$ qui recouvre U et telle que $X \cap U_i$ est fermé pour tout i (c'est un fait de topologie générale que dans un tel cas, X est fermé ssi $X \cap U_i$ est fermé pour tout i).
On construit ce recouvrement de la façon suivante : si $a \in U$ est un maximum local de φ, on considère un voisinage U_a de a sur lequel a est un maximum global, et alors $X \cap U_a = \varphi^{-1}(a) \cap U_a$. Si $a \in U$ n'est pas un maximum local, on affirme qu'il existe un voisinage U_a de a qui ne contient aucun maximum local.
Par l'absurde, supposons le contraire et considérons V un voisinage de a sur lequel $\sum_j \alpha_j \log f_j$ est définie (par exemple le disque construit plus haut). Cet ouvert contient un maximum local de φ, et donc un ouvert non-vide, disons W, sur lequel φ est constante. Comme $\varphi = \sum_j \alpha_j \Re(\log(f_j))$ sur V, les équations de Cauchy-Riemann nous enseignent la fonction $\sum_j \alpha_j \log f_j$ est constante sur l'ouvert W et est donc constante sur tout V : c'est une contradiction avec le fait que a n'est pas un maximum local.
X est un ouvert-fermé de U, et il est non-vide : c'est donc U tout entier. Il en découle que φ atteint un maximal local en chaque point, et est donc localement constante au voisinage de chaque point, donc constante.
Remarque : l'exercice se fait beaucoup plus vite avec le principe du maximum pour les fonctions harmoniques, en remarquant que $\log|f|$ *est harmonique pour* f *holomorphe.*

3. Comme $|e^{f(z)}| = e^{\Re f(z)}$, la fonction $\Re f$ atteint un maximum local en a si, et seulement si $|e^f|$ atteint un maximum local en a. Dans ce cas, $|e^f|$ est constante et, en passant au log, $\Re(f)$ est constante également. Les équations de Cauchy-Riemann permettent de conclure que f est constante.

Exercice 5. Croissance comparée de fonctions entières.
Si g est la fonction nulle, alors f aussi et le résultat est trivial. On suppose g non-nulle. On définit, pour $a \in \mathbb{C}$ tel que $g(a) \neq 0$, $h(z) = f(z)/g(z)$.
Si a est un zéro de g, il doit aussi être un zéro de f. Mieux : si a est un zéro d'ordre k de g, alors $g(z)/(z-a)^k$ est bornée au voisinage de a et donc $f(z)/(z-a)^k$ est bornée également au voisinage de k, donc a est un zéro d'ordre k de f.
On peut donc étendre h au voisinage de chaque zéro de g, et on obtient une fonction entière. Cette fonction entière est bornée par 1 (elle l'est sur l'ouvert dense $g \neq 0$), donc constante par le théorème de Liouville.

Exercice 6. L'inégalité de Carathéodory.
Soit f une fonction entière. On pose

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|,\ A(r) = \sup_{|z|=r} \Re f(z).$$

1. La croissance de M et A découle du principe du maximum. La croissance implique l'existence des limites à droite et à gauche. En considérant z de module r qui réalise $M(r)$, on a

$$M(r) = \lim_{\varepsilon>0} |f(z(1-\varepsilon/r))| \leq \lim_{\varepsilon>0} M(r-\varepsilon) \leq M(r).$$

Reste à voir que $\lim_{\varepsilon>0} M(r+\varepsilon) = M(r)$: si on considère une suite $(z_n)_n$ vérifiant $|z_n| \to r$ et $|f(z_n)| = M(|z_n|)$, on peut extraire une sous-suite convergente et sa limite z, de module r, vérifie $\lim_{\varepsilon>0} M(r+\varepsilon) = |f(z)| \leq M(r)$.
La croissance stricte découle encore une fois du principe du maximum : si $M(r) = M(r')$, $r < r'$, alors $M(r)$ est un maximum local de $|f|$ et f est constante (le même raisonnement fonctionne pour $\Re f$).

2. Soit $z \in \mathbb{D}$, on écrit $f(rz) = p + iq$. Alors

$$2A(2r) + \varepsilon - f(2rz) = A(2r) + \varepsilon + (A(2r) - p) - iq.$$

Comme $|z| < 1$, on a $A(2r) - p \geq 0$, et donc

$$|2A(2r) + \varepsilon - f(2rz)|^2 \geq (A(2r) + \varepsilon)^2 + q^2 > p^2 + q^2 = |f(z)|^2$$

donc $|g(z)| < 1$.

3. Comme $g(0) = f(0)/(2A(2r) + \varepsilon - f(0)) = 0$, le lemme de Schwarz assure que $|g(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, donc (en faisant tendre $\varepsilon \to 0$) :

$$|f(2rz)| \leq |z|(2A(2r) + |f(2rz)|)$$

car $A(2r) \geq A(0) = 0$. On réarrange, et on obtient

$$(1 - |z|)|f(2rz)| \leq |z| 2A(2r).$$

En appliquant cette inégalité à $u/2$ avec $|u| = 1$, on trouve finalment $f(ru) \leq 2A(2r)$, et donc $M(r) \leq 2A(2r)$.

4. On considère $g(z) = f(z) - f(0)$, qui s'annule en 0 et vérifie $|g(z)| \leq |f(z)| + |f(0)|$. On trouve donc, pour r assez grand :

$$M_g(r) \leq M_f(r) + |f(0)| \leq 2A_f(2r) + |f(0)| \leq 2^{1+\alpha} A r^\alpha + K + |f(0)|.$$

Par la deuxième question de l'exercice suivant, c'est suffisant pour conclure que f est un polynôme de degré $\leq \lfloor \alpha \rfloor$.

Exercice 7. Autour du théorème de Liouville.

1. On considère la fonction $g : z \mapsto f(z)/z^N$, qui est bien définie au voisinage de 0 à cause des conditions sur les $f^{(k)}$, $k < N$, c'est une fonction entière. Soit $R > 0$ tel que $|f(z)/z^N| \leq C$ pour $|z| \geq R$. on a $|g(z)| \leq \max(C, \max_{|z| \leq R} |g|) < \infty$: par le théorème de Liovuille, g est constante. Comme $g(0) = f^{(N)}(0) = 0$, g est nulle.

2. Si P est de degré d, on considère $g(z) = f(z) - Q(z)$ où $Q(z) = f(0) + f'(0)z + ... + \frac{f^{(d)}(0)}{n!} z^d$. On a $g(0) = ... = g^{(d)}(0) = 0$ et

$$|g(z)| \leq P(|z|) + |Q(z)|.$$

Pour $|z|$ assez grand, on a donc $|g(z)| \leq C|z|^d$ pour une constante C (il suffit de prendre C supérieur à la somme des coefficients dominants de P et $|Q|$), et elle vérifie donc les hypothèses de la question précédente : elle est nulle, et $f(z) = Q(z)$.

3. Il existe une fonction holomorphe $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f(z) = e^{L(z)}$, on peut par exemple la définir par

$$L(z) = \int_0^z \frac{f'(w)}{f(w)} dw.$$

On a $|f(z)| \leq e^{\Re L(z)}$, donc $\Re L(z) \leq A|z|^d + \log(C)$. L'exercice précédent implique que L est une fonction polynomiale de degré $\leq d$.

4. Si $\deg(P) = 0$, le résultat est immédiat, on suppose $\deg(P) \geq 1$. Supposons par l'absurde que $e^z = P(z)$ admet un nombre fini de solutions : la fonction $z \mapsto e^z - P(z)$ est une fonction entière s'annulant seulement en un nombre fini de points $a_1, ..., a_r$ avec multiplicités $m_1, ..., m_r$.
On pose $Q(z) = \prod_j (z - a_j)^{m_j}$: la fonction $f : z \mapsto \frac{e^z - P(z)}{Q(z)}$ est une fonction entière ne s'annulant pas.
Comme $|f(z)| \leq e^{2|z|}$, l'exercice précédent prévoit que $f(z) = e^{az+b}$ pour certains $a, b \in \mathbb{C}$.
Comme $|f(t)| \sim C e^t t^{-\deg(Q)} = e^{\Re(a)t + \Re(b)}$ quand $t \to \infty$, on trouve $\deg(Q) = 0$ et $\Re(a) = 1$.
On a alors $|f(it)| \sim C t^{\deg(P)}$ quand $t \to \infty$, ce qui cause une contradiction car $|e^{ait}| = e^{-\Im(a)t}$ ne peut pas avoir une croissance polynomiale, peu importe a. L'équation $e^z = P(z)$ admet donc bien une infinité de solutions.

Exercice 8. Théorème des trois cercles et des trois droites d'Hadamard

1. Soit r_1 et r_2 deux réels positifs et f une fonction holomorphe définie sur l'anneau $\{z \in \mathbb{C},\ r_1 < |z| < r_2\}$ et s'étendant continument à son adhérence. Pour tout $r \in [r_1, r_2]$, on note:

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

On veut montrer que $\log M$ est une fonction convexe de $\log(r)$.

   (a) On pose $t = \frac{\log(\rho)-\log(r)}{\log(R)-\log(r)}$: c'est l'unique réel tel que $\log(\rho) = t\log(R) + (1-t)\log(r)$, et on a $1-t = \frac{\log(R)-\log(\rho)}{\log(R)-\log(r)}$. Ainsi, l'inégalité donnée dans l'énoncé est équivalente à

   $$\log M(R^t r^{1-t}) \leq t \log M(R) + (1-t)\log M(r^{1-t}).$$

   L'inégalité de l'énoncée est vraie pour tout ρ si et seulement si cette inégalité ci-dessus est vraie pour tout t, et donc $\log M$ est convexe en $\log(r)$.

   (b) On écrit $\beta = p/q$ avec $q > 0$, et on applique le principe du maximum à $z \mapsto z^p f(z)^q$, ce qui donne

   $$\rho^p M(\rho)^q \leq \max\left(r^p M(r)^q, R^p M(R)^q\right)$$

   pour $r \leq \rho \leq R$. On passe ensuite à la puissance $1/q$ pour avoir la conclusion pour tout rationnel, et on a la conclusion pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ par passage à la limite.

   (c) On peut calculer qu'un tel α est donné par

   $$\alpha = \frac{\log M(R) - \log M(r)}{\log(R) -_l og(r)}.$$

   On a donc

   $$\alpha \log(\rho) + \log M(\rho) \leq \alpha \log(r) + \log M(r)$$

   et on vérifie que

   $$\alpha(\log(r) - \log(\rho)) + \log M(r) = t\log M(R) + (1-t)\log M(r)$$

   pour le t donné à la question (a).

2. Soient x_1 et x_2 deux réels et f une fonction holomorphe sur $B = \{z \in \mathbb{C},\ x_1 < \Re(z) < x_2\}$, bornée et s'étend continument à $\overline{B}$. Pour tout $x \in [x_1, x_2]$, on note:

$$M(x) = \sup_{\Re(z)=x} |f(z)|.$$

On va prouver que $\log M$ est une fonction convexe de x.

   (a) Si l'on veut prouver la convexité sur l'intervalle $[a, b]$ dans une bande, on réalise le changement de variable $u = a + (b-a)z$ pour se ramener à $a = 0, b = 1$.

   (b) On considère, pour $T > 0$, le rectangle $R_T = [0,1] + i[-T, T]$. Pour $T >> 0$, f atteint son maximum sur les bords verticaux de R_T car $\frac{f(z)}{M(0)^z M(1)^{1-z}}$ est bornée sur la bande verticale et et $\frac{1}{1+\varepsilon z} \to 0$ quand $z \to \infty$. Il en découle que pout tout $t \in [0,1]$, $y \in \mathbb{R}$ on a

   $$\frac{|f(t+iy)|}{M(0)^{1-t} M(1)^t |1 + \varepsilon(t+iy)|} \leq 1$$

   car $\left|\frac{f(iy)}{M(0)(1+\varepsilon iy)}\right| \leq 1$ et $\left|\frac{|f(1+iy)|}{M(1)(1+\varepsilon(1+iy))}\right| \leq 1$ par construction.
   Il suffit maintenant de prendre $\varepsilon \to 0$ et de prendre, à t fixé, le sup sur $y \in \mathbb{R}$ pour obtenir le résultat désiré.

3. On considère la fonction $z \mapsto f(e^z)$ sur la bande $\log(r_1) \leq \Re(z) \leq \log(r_2)$, les droites verticales sont envoyées sur des cercles. On a $\sup_{|z|=r} |f(z)| = \sup_{\Re(u)=\log(r)} |f(e^u)|$, ce qui conclut sur la convexité en $\log(r)$.

Lemme de Schwarz

Exercice 9. Variations du lemme de Schwarz.
Soient $M \geq 0$, $\mathbb{D}$ le disque unité, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$.

1. On applique la formule de Cauchy à $\partial\mathbb{D}(0, r)$ pour $r > |z|$:
$$f'(z) \leq \frac{r}{2\pi} \int_0^{2_p i} \frac{|f(re^{i\theta})|}{|re^{i\theta} - z|} d\theta \leq \frac{rM}{r - |z|}.$$
On prend $r \to 1$ et on obtient le résultat.

2. $z \mapsto f(z)/z^k$ est bien définie sur $\mathbb{D}$, et par principe du maximum on a $|f(z)/z^k| \leq M/r^k$ pour tout $r < 1$, donc en prenant $r \to 1$:
$$|f(z)|_l eM|z|^k.$$
Si l'égalité a lieu, $f(z)/z^k$ a un maximum local et est donc constante, donc $f(z) = \alpha z^k$.

3. $|f(z)| \leq M|z|$ découle de la question précédente. On pose $g(z) = f(z) - z$: elle vérifie l'estimation $|g(z)| \leq M + 1$ et $g(0) = g'(0) = 0$. Par la question précédente $|g(z)| \leq M|z|^2$.

4. $|f'(z) - 1| \leq (M + 1)|z|$ découle encore une fois de la question 2. On applique l'IAF à $t \mapsto f(tz)$, dont la dérivée est $zf'(tz)$ sur $[0, 1]$ et on obtient
$$|f(z)| = |f(z) - f(0)| \leq \sup |zf'(tz)| \leq M|z|.$$
On considère $p(t) = f(tz) - tz$, de dérivée $p'(t) = zf'(tz) - z$, qui vérifie $|p'(t)| \leq |z| \cdot |f'(tz) - 1| \leq (M + 1)t|z|^2$. On intègre entre 0 et 1 pour obtenir
$$|p(1) - p(0)| = |f(z) - z| \leq \frac{M + 1}{2}|z|^2.$$

Exercice 10. Automorphismes du demi-plan de Poincaré.
On note $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert et $\mathbb{H}$ le demi-plan supérieur ouvert.

1. Par la théorie générale des homographies, l'inverse de h est
$$z \mapsto \frac{z - i}{z + i}.$$
Un calcul explicite montre que h envoie $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{H}$ et réciproquement pour l'inverse, donc la restriction de h à $\mathbb{D}$ donne un biholomorphisme.

2. On sait que les biholomorphismes de $\mathbb{H}$ sont de la forme hgh^{-1} avec g un biholomorphisme de $\mathbb{D}$, ils sont donc données par
$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$
pour certains $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Par continuité, une homographie préservant $\mathbb{H}$ doit préserver $\mathbb{R} \cup \infty$, donc si $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, alors elle et son inverse préservent $\mathbb{R} \cup \infty$. On suppose $a, b, c, d \neq 0$, le cas où l'un des coefficients est nul est facilement résolu. En évaluant g en 0 et ∞, et on obtient $\frac{b}{d} \in \mathbb{R}$ et $\frac{a}{c} \in \mathbb{R}$. En utilisant le fait que $g^{-1}(0), g^{-1}(\infty) \in \mathbb{R}$ et $g^{-1}(0) = -b/a$, $g^{-1}(\infty) = -d/c$, on a $b/a, d/c \in \mathbb{R}$.
Ces quatre conditions, mises ensembles, impliquent que a, b, c, d sont des multiples réels d'un même nombre complexe. Comme a, b, c, d et ua, ub, uc, ud produisent la même homographie, on peut supposer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Reste à calculer
$$\Im\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{1}{|cz + d|^2} \Im\left(ac|z|^2 + bd + adz + bc\overline{z}\right) = \frac{1}{|cz + d|^2} \Im(adz + bc\overline{z}) = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} \Im(z).$$
La condition $ad - bc > 0$ est donc nécessaire et suffisante pour qu'une homographie à coefficients réels préserve $\mathbb{H}$, ce qui permet de conclure.

Exercice 11. Lemme de Schwarz-Pick.

1. On considère $F : z \mapsto \frac{z-w}{1-\overline{w}z}$ et $G : z \mapsto \frac{z-f(w)}{1-\overline{f(w)}z}$, et on veut montrer que $|F(f(z))| \leq |G(z)|$, ou encore $|F(f(G^{-1}(z)))| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. On vérifie que $G(w) = 0$ et donc $F \circ f \circ G^{-1}(0) = F(f(w)) = 0$, donc le lemme de Schwarz s'applique.
La majoration $|f'(w)| \leq \frac{1-|f(w)|^2}{1-|w|^2}$ s'obtient en constatant que $|g'(0)| \leq 1$ (pas d'astuce, juste un calcul un peu long ici).
Si on a égalité dans un des deux cas, alors $g(z) = e^{i\theta}z$, donc $F(f(z)) = e^{i\theta}G(z)$ et donc $f(z) = F^{-1}(e^{i\theta}G(z))$.

2. Pour faire la question, il faut transférer le lemme de Schwarz sur le demi-plan de Poincaré, par exemple avec l'homographie h de l'exercice précédent. On considère donc les biholomorphismes réciproques
$$h(z) = i\frac{1+z}{1-z},\ l(z) = h^{-1}(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$
La fonction holomorphe donnée par $g(z) = lfh(z)$ est une fonction du disque dans lui-même, et la question précédente s'applique : on a
$$\left|\frac{lf(z) - lf(w)}{1-\overline{lf(w)}lf(z)}\right| \leq \left|\frac{l(z)-l(w)}{1-\overline{l(w)}l(z)}\right|.$$
Reste seulement à prouver que $\left|\frac{l(z)-l(w)}{1-\overline{l(w)}l(z)}\right| = \left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|$ pour conclure. Un calcul explicite fonctionne très bien, mais on peut fonctionner autrement : on sait que $G \circ l$ est une homographie qui envoie w sur 0, $\overline{w}$ sur ∞ (on vérifie en effet que $\overline{l(w)} = 1/l(\overline{w})$) et $l(\infty) = 1$.
De là, on sait (prouvé ci-dessous) qu'il existe, pour $A, B, C \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ distincts, $P, Q, R \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ distincts, une unique homographie qui envoie A, B, C sur P, Q, R respectivement (on dit que le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est strictement 3-transitif).
Ce fait permet de déduire que $G \circ l(z) = \frac{z-w}{z-\overline{w}}$!

Preuve du fait : il suffit de prouver qu'il existe une unique homographie qui envoie $0, 1, \infty$ sur P, Q, R, et de considérer la composition de l'homographie envoyant A, B, C sur $0, 1, \infty$ et $0, 1, \infty$ sur P, Q, R.
L'unicité découle du fait que si on a deux homographies qui envoient A, B, C sur P, Q, R, on peut les précomposer par une homographie qui envoie A, B, C sur $0, 1, \infty$ (l'inverse de celle qui envoie $0, 1, \infty$ sur A, B, C) et ainsi obtenir deux homographies qui envoient $0, 1, \infty$ sur P, Q, R, qui sont donc les mêmes.
La condition $f(0) = P$, $f(\infty) = R$ fixe $b/d = P$, $a/c = R$ (à comprendre $d = 0$ si $P = \infty$, $c = 0$ si $R = \infty$).
Si P, Q, R ne sont pas l'infini, on obtient $b = dP, a = cR$ et donc $f(1) = \frac{cR+dP}{c+d} = Q$.
En réarrangeant, on obtient $c = d\frac{P-Q}{R-Q}$. On a donc exprimé tous les coefficients de l'homographie comme un multiple de d, et on peut simplifier par d. On vérifie ensuite que l'homographie obtenue a bien les propriétés désirées.
Les cas où P, Q ou R est ∞ sont ensuite réglés individuellement : si $P = \infty$, on a $d = 0$ et b arbitraire, et on trouve $\frac{cR+b}{c} = Q$, donc $b = c(R-Q)$ et tous les coefficients sont écrits come multiples de c. Le cas $R = \infty$ donne $c = 0$, l'évaluation en 1 donne $\frac{a+dP}{d} = Q$, et donc $a = d(Q-P)$. Le cas $Q = \infty$ donne $c + d = 0$ donc $c = -d$.
Remarque : cette observation est cohérente avecc le fait que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$ *est de dimension complexe* $\dim(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})) - \dim(\mathbb{C}^\times) = 4 - 1 = 3$ *: un élément de* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$*, c'est-à-dire une homographie, est entièrement (et uniquement) décrite par trois paramètres complexes* P, Q *et* R *!*